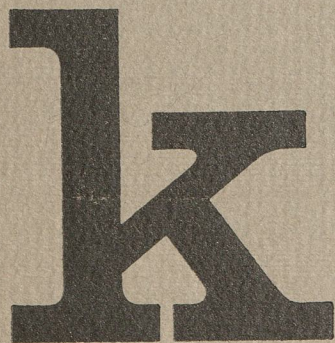
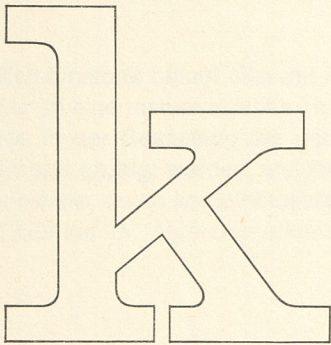




Studienreihe der Hochschule für Gestaltung  
Offenbach am Main 1973

Kombinatorik



Studienreihe der Hochschule für Gestaltung Offenbach am Main

Heft: Kombinatorik

Text: Klaus Staudt

Bild: Michael Marschall

1973

## **Kombinatorik**

Kombinatorik befaßt sich mit Anordnungsregeln gegebener Elemente.  
Sie ist eine mathematische Theorie,  
die in der Gestaltung bei der Berechnung von Strukturvorräten ein Anwendungsgebiet findet.  
Es soll gezeigt werden, welche vielseitigen gestalterischen Möglichkeiten  
einfache, durch kombinatorische Gesetze festgelegte Strukturanordnungen haben.  
Dafür sei im folgenden erklärt:

was Struktur ist,  
was Kombinatorik ist,  
welche Operationen innerhalb der Kombinatorik  
möglich sind.

**Struktur** ist ein Anordnungsgefüge, das aus Strukturelementen und aus einer Struktursyntax besteht.

**Strukturelemente** sind die Teile dieses Gefüges und haben unter anderem folgende Merkmale:

- Farbe
- äußere Form
- innere Form (Textur)
- Oberflächenbeschaffenheit (Faktur)
- Stellung (Drehung)
- Plastizität

Die Strukturelemente müssen sich in mindestens einem Merkmal voneinander unterscheiden.

**Struktursyntax** beschreibt die Anordnungsregeln, die für die Zusammenstellung der Strukturelemente in Frage kommen. Solche Regeln sind z. B.:

- Symmetrie
- Asymmetrie
- Binnengliederung
- Kombinatorik

**Kombinatorik** ist also eine Anordnungsregel unter mehreren. Sie fragt, welche Kombinationsmöglichkeiten für eine gegebene Anzahl von Strukturelementen, bezogen auf bestimmte Besetzungsstellen, möglich sind.

Die Kombinatorik beschreibt die Anordnungsmöglichkeiten in Form von Operationen; fünf davon werden hier vorgestellt:

- Kombination
- Kombination nach Klassen
- Variation gleicher Häufigkeiten
- Variation ungleicher Häufigkeiten
- Permutation

Im Prinzip laufen die Gesetze der Kombinatorik auf Produktbildungen hinaus.

Das soll an einem einfachen Beispiel näher erklärt werden:

Mit einer einstelligen Haustelefonanlage sind durch die Zeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zehn Teilnehmer zu erreichen.

Wird das System auf zweistellige Telefonnummern erweitert, so erfolgt nicht etwa eine einfache Addition 10 plus 10 gleich 20, sondern es läßt sich jedes der zehn erstverwendeten Zeichen mit einem der zehn hinzukommenden Zeichen kombinieren, also 10 mal 10 gleich 100 Teilnehmer.

Infolge dieser Multiplizität wächst die Kombinationsmöglichkeit und damit der Vorrat der Struktur rasch an, wenn sich die Zahl der Zeichensorten oder der Besetzungsstellen nur geringfügig erhöht.

Die Anzahl der Lösungen läßt sich mit den folgenden Formeln ermitteln.

## Kombination

Alle Zusammenstellungen kleinerer Anzahlen von Strukturelementen aus einer größeren Elementenzahl werden Kombinationen genannt. Die Anzahl der Besetzungsstellen ( $b$ ) pro Lösung ist also kleiner als die Anzahl der unterschiedlichen Elemente ( $n$ ), also

$$b < n$$

Die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten wird nach der Formel berechnet

$$k = \frac{n!}{(n-b)! \cdot b!}$$

dabei ist

- $k$  – Anzahl der möglichen Kombinationen
- $n$  – Anzahl der unterschiedlichen Elemente
- $b$  – Anzahl der Besetzungsstellen

! ist ein Zeichen aus der Mathematik und heißt Fakultät. Es bedeutet, daß das fortlaufende Produkt aus den natürlichen Zahlen bis zur  $n$ -ten Zahl gebildet werden soll.

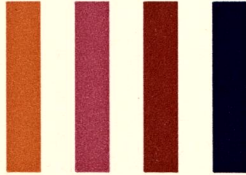
Beispiele:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Ein Kombinationsbeispiel soll das Gesagte anschaulich machen.

Gegeben seien 4 farbunterschiedliche Strukturelemente



orange  
hellrot  
rot  
violett

und 3 Besetzungsstellen.

Es ist also

$$n = 4$$

$$b = 3$$



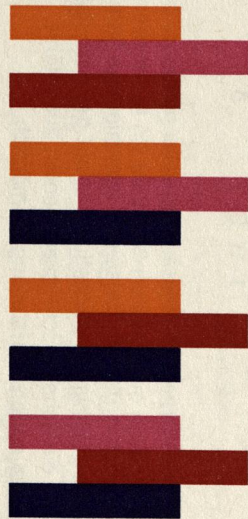
Nach der angegebenen Formel folgt

$$k = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!}$$

$$k = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{24}{6}$$

$$k = 4$$

Es gibt in diesem Beispiel 4 verschiedene Farbkombinationen.  
Ihre graphische Darstellung ist auf der nächsten Seite  
mit einfachen Rechteckelementen ausgeführt.  
Jede andere Darstellung ist möglich.



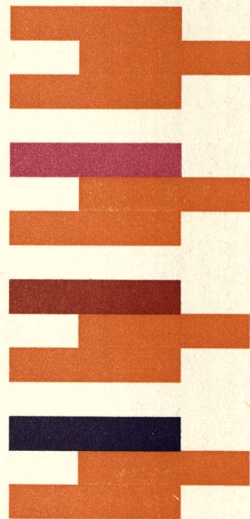
Sollen auch Wiederholungen der gegebenen Strukturelemente innerhalb einer Konstellation auftreten, so lautet die Formel

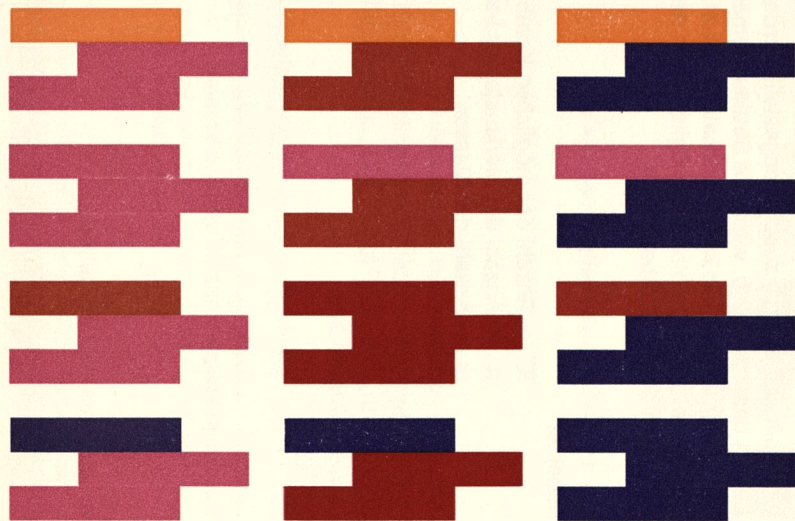
$$k' = \frac{(n + b - 1)!}{(n - 1)! \cdot b!}$$

Für  $n = 4$  und  $b = 3$  folgt

$$k' = 20$$

Zu den 4 dreifarbigen Lösungen kommen diese 16 hinzu:





Es ergeben sich also 4 einfarbige und 12 zweifarbige Lösungen.  
Vertauschungen innerhalb dieser Lösungen finden nicht statt.

## Kombination nach Klassen

Häufig tritt ein kombinatorisches Problem auf, bei dem Strukturelemente nach ihren Merkmalen in Klassen eingeteilt und danach zusammengestellt werden sollen. Das ist dann gegeben, wenn die Strukturelemente mindestens 2 oder mehr unterschiedliche Merkmale besitzen. Die Anzahl aller Kombinationsmöglichkeiten nach Klassen wird nach der Formel berechnet

$$k'' = \prod_{i=1}^m \cdot r_i$$

dabei ist

$k''$  – Anzahl der möglichen Kombinationen  
 $r_i$  – Anzahl der Merkmale der i-ten Klasse  
 $m$  – Anzahl der Klassen

$\prod$  ist ein Symbol aus der Mathematik und heißt Pi.

Es weist an, daß das Produkt aller unterschiedlichen  $r_i$  gebildet werden soll.

Bei  $\prod_{i=1}^m$  soll das Produkt aus m-unterschiedlichen  $r_i$  gebildet werden. Beispiel: Gibt es die 3 unterschiedlichen Klassen mit der jeweiligen Anzahl von Merkmalen

$$r_2 = 2; r_3 = 3; r_4 = 4$$

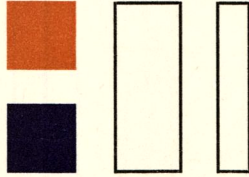
so wird das Produkt gebildet

$$r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Für ein Kombinationsbeispiel seien 2 Klassen gewählt

- Klasse 1: Farbe (f)  
Klasse 2: äußere Form (g)

Die Merkmale der Klassen sollen dabei sein



- Klasse 1: orange, violett  
Klasse 2: breites Rechteck, schmales Rechteck

Es ist also

$$r_f = 2$$
$$r_g = 2$$

Nach der angegebenen Formel folgt

$$k'' = 2 \cdot 2$$
$$k'' = 4$$

Die 4 folgenden Lösungen sind möglich:



Die Lösungen lassen sich weiter miteinander verknüpfen.

### Variation gleicher Häufigkeiten

Alle Zusammenstellungen und Vertauschungen kleinerer Anzahlen von Strukturelementen aus einer größeren Elementenzahl werden Variation mit gleichen Häufigkeiten genannt. Die Anzahl der Besetzungsstellen ( $b$ ) pro Lösung ist also kleiner als die Anzahl unterschiedlicher Elemente, also

$$b < n$$

Die Anzahl der Variationsmöglichkeiten wird nach der Formel berechnet

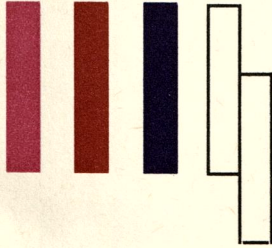
$$v = \frac{n!}{(n-b)!}$$

dabei ist

- $v$  – Anzahl der möglichen Variationen
- $n$  – Anzahl der unterschiedlichen Elemente
- $b$  – Anzahl der Besetzungsstellen

Bei der Kombination spielt nur die einfache Zusammenstellung der Strukturelemente eine Rolle.

Bei der Variation werden die Vertauschungen von  $n$  innerhalb der Zusammenstellungen mitberücksichtigt. Ein Variationsbeispiel mit gleichen Häufigkeiten wird dies zeigen.



Es seien die 3 farbunterschiedlichen Strukturelemente gegeben

- hellrot
- rot
- violett

und 2 Besetzungsstellen.  
Es ist also

$$n = 3$$

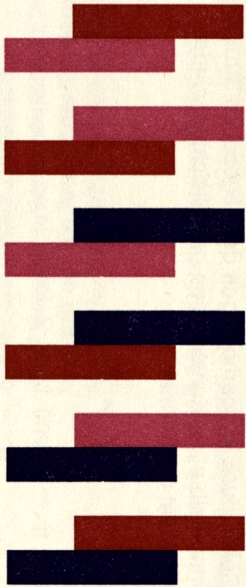
$$b = 2$$

Nach der angegebenen Formel folgt

$$v = \frac{3!}{(3-2)!}$$

$$v = 6$$

Die 6 zweifarbigen Lösungen dieser Aufgabe:



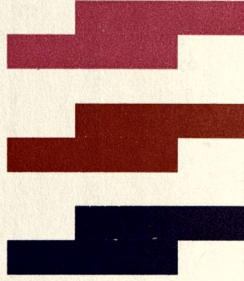
Sollen auch Wiederholungen der gegebenen Strukturelemente innerhalb einer Konstellation berücksichtigt werden, so lautet die Formel

$$v' = n^b$$

Für  $n = 3$  und  $b = 2$  folgt

$$v' = 9$$

Zu den 6 zweifarbigen Lösungen kommen 3 einfarbige hinzu:



Wird ein Variationsbeispiel  $n = 4$  und  $b = 3$  angenommen, so werden ebenfalls bei der Wiederholung von Elementen ein- und zweifarbige Lösungen entstehen, wie bei dem ausgeführten Kombinationsbeispiel. Die Anzahl der Lösungen ist dabei entsprechend größer.

## Variation ungleicher Häufigkeiten

Alle Zusammenstellungen und Vertauschungen von Strukturelementen werden zur Variation mit ungleichen Häufigkeiten gezählt, wenn die Anzahl der Besetzungsstellen ( $b$ ) pro Lösung größer ist als die Anzahl der unterschiedlichen Elemente ( $n$ ), also

$$b > n$$

Die Anzahl aller Variationsmöglichkeiten ungleicher Häufigkeiten wird nach der Formel berechnet

$$v'' = \frac{b!}{\prod_{i=1}^n (h_i \cdot b)!}$$

dabei ist

- $v''$  – Anzahl der möglichen Variationen
- $b$  – Anzahl der Besetzungsstellen
- $h_i$  – Häufigkeit der unterschiedlichen Elemente, bezogen auf die Anzahl der Besetzungsstellen
- $n$  – Anzahl der unterschiedlichen Elemente

$\prod_{i=1}^n$  weist an, daß das Produkt aller  $n$ -unterschiedlichen  $(h_i \cdot b)!$  gebildet werden soll.

Für ein Variationsbeispiel mit ungleichen Häufigkeiten  
seien die 3 farbunterschiedlichen Strukturelemente gegeben

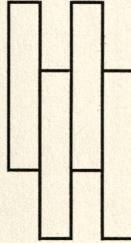


hellrot  
rot  
violett

mit den Häufigkeiten

$$\begin{aligned} h_h &= 1/4 \\ h_r &= 2/4 = 1/2 \\ h_v &= 1/4 \end{aligned}$$

und 4 Besetzungsstellen



$$b = 4$$

Nach der angegebenen Formel folgt

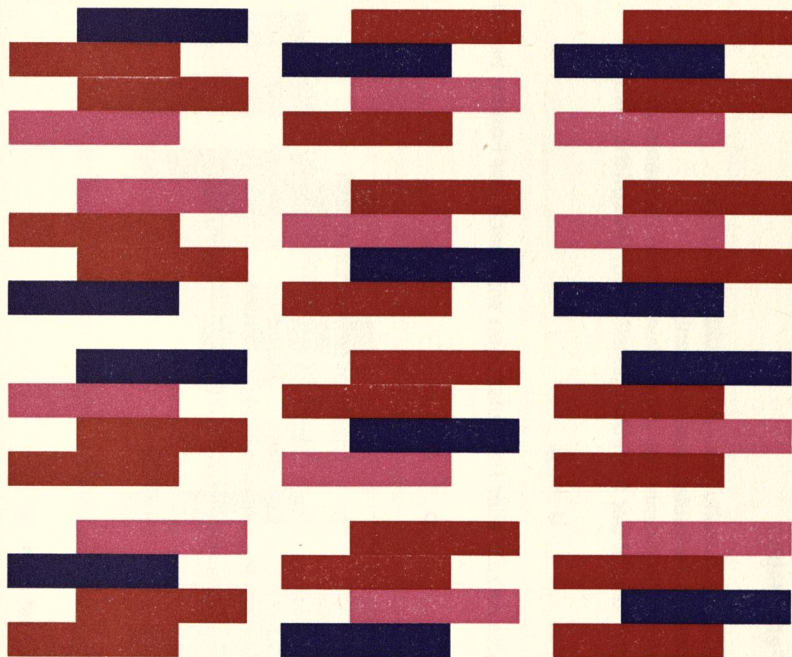
$$v'' = \frac{4!}{(1/4 \cdot 4)! \cdot (1/2 \cdot 4)! \cdot (1/4 \cdot 4)!}$$

$$v'' = \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!}$$

$$v'' = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$v'' = 12$$

Alle Lösungen haben das gleiche Farbrepertoire;  
die Vertauschungen sehen folgendermaßen aus:



## Permutation

Alle Vertauschungen von Strukturelementen werden Permutationen genannt, wenn die Anzahl der unterschiedlichen Elemente ( $n$ ) der Anzahl der Besetzungsstellen ( $b$ ) entspricht, also

$$b = n$$

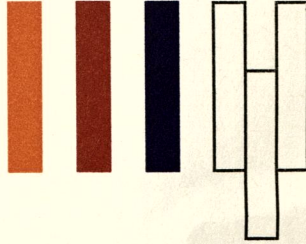
Die Anzahl aller Permutationen wird nach der Formel berechnet

$$p = n!$$

dabei ist

- $p$  – Anzahl aller Permutationen
- $n$  – Anzahl der unterschiedlichen Elemente

Für ein Permutationsbeispiel seien  
3 unterschiedliche Strukturelemente gegeben



orange  
rot  
violett

Es ist also

$$n = 3$$

Dem Permutationsgesetz entsprechend gibt es 3 Besetzungsstellen.

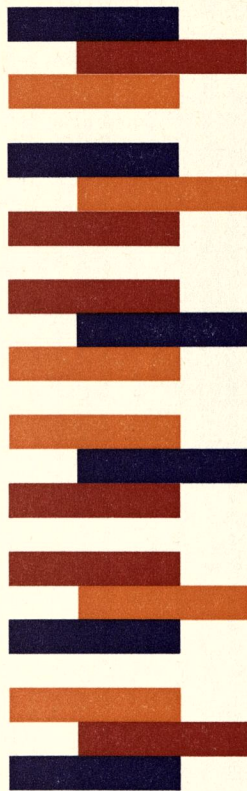
Nach der angegebenen Formel folgt

$$p = 3!$$

$$p = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$p = 6$$

Die 6 graphischen Lösungen sehen wie folgt aus:



Literatur:

- Kurd Alsieben: Ästhetische Redundanz, Quickborn 1962  
 H. W. Franke: Phänomen Kunst, München 1967  
 Klaus Staudt im Katalog: Norm und Form, Methoden konstruktiver Kunst, Paderborn 1972

Dieses Heft entstand in Zusammenarbeit von Studenten und Dozenten.  
 Es begleitet den Unterricht Kombinatorik im Fachbereich Graphik  
 und soll den Studierenden eine kurze Zusammenfassung  
 des Stoffes in die Hand geben.

Idee und Konzeption: Klaus Staudt und Hans Schmidt  
 Gesamtgestaltung: Michael Marschall

Gedruckt in den Werkstätten der HfG.  
 Gesetzt in Helvetica leicht und halbfett.