Studienreihe der Hochschule für Gestaltung
Offenbach am Main 1981

Kombinatorik

Studienreihe der Hochschule für Gestaltung Offenbach am Main

Heft: Kombinatorik
Text: Klaus Staudt
Bild: Annette Schnermann
2. Auflage

1981

Kombinatorik

Kombinatorik befaßt sich mit Anordnungsregeln gegebener Elemente. Sie ist eine mathematische Theorie, die in der Gestaltung bei der Berechnung von Strukturvorräten ein Anwendungsgebiet findet. Es soll gezeigt werden, welche vielseitigen gestalterischen Möglichkeiten einfache, durch kombinatorische Gesetze festgelegte Strukturanordnungen haben.

Es werden folgende Themen behandelt:

A Struktur

- I Strukturelemente
- II Struktursyntax

B Kombinatorik

- I Kombination
- II Kombination nach Klassen
- III Variation gleicher Häufigkeiten
- IV Variation ungleicher Häufigkeiten
- V Permutation

C Formelsammlung

D Bildbeispiele

A Struktur

Struktur ist ein Anordnungsgefüge, das aus Strukturelementen und aus einer Struktursyntax besteht.

I Strukturelemente

Strukturelemente sind die Teile dieses Gefüges und haben unter anderem folgende Merkmale:

Farbe
äußere Form
innere Form (Textur)
Oberflächenbeschaffenheit (Faktur)
Stellung (Drehung)
Plastizität

Die Strukturelemente müssen sich in mindestens einem Merkmal voneinander unterscheiden.

II Struktursyntax

Struktursyntax beschreibt die Anordnungsregeln, die für die Zusammenstellung der Strukturelemente in Frage kommen. Solche Regeln sind z.B.:

Symmetrie
Asymmetrie
Binnengliederung
Kombinatorik

B Kombinatorik

Kombinatorik ist eine Anordnungsregel unter mehreren.
Sie fragt, welche Kombinationsmöglichkeiten
für eine gegebene Zahl von Strukturelementen,
bezogen auf bestimmte Besetzungsstellen, möglich sind.
Im Prinzip laufen die Gesetze der Kombinatorik
auf Produktbildungen hinaus.

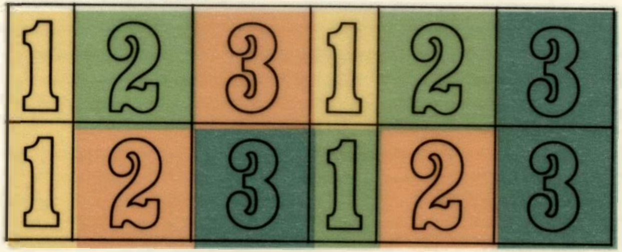
Das soll an einem einfachen Beispiel näher erklärt werden:
Mit einer einstelligen Haustelefonanlage sind durch die
Zeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zehn Teilnehmer zu erreichen.
Wird das System auf zweistellige Telefonnummern erweitert,
so erfolgt nicht etwa eine einfache Addition
10 plus 10 gleich 20,
sondern es läßt sich jedes der zehn erstverwendeten Zeichen
mit einem der zehn hinzukommenden Zeichen kombinieren,
also 10 mal 10 gleich 100 Teilnehmer.

Infolge dieser Multiplizität wächst die Kombinationsmöglichkeit
und damit der Vorrat der Struktur rasch an,
wenn sich die Zahl der Zeichensorten oder der Besetzungsstellen
nur geringfügig erhöht.
Die Anzahl der Lösungen
läßt sich mit den folgenden Formeln ermitteln.

I Kombination

$b < n$

Alle Zusammenstellungen kleinerer Anzahlen von Strukturelementen aus einer größeren Elementenzahl werden Kombination genannt. Die Anzahl der Besetzungsstellen (b) pro Lösung ist also kleiner als die Anzahl der unterschiedlichen Elemente (n).



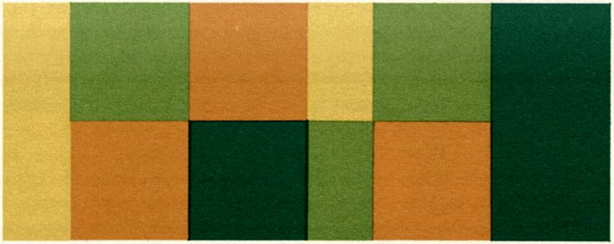
Im oben gezeigten Beispiel sind gegeben:
Die vier farbunterschiedlichen Strukturelemente

und drei unterschiedliche Besetzungsstellen

I Kombination

$b < n$

Alle Zusammenstellungen kleinerer Anzahlen von Strukturelementen aus einer größeren Elementenzahl werden Kombination genannt. Die Anzahl der Besetzungsstellen (b) pro Lösung ist also kleiner als die Anzahl der unterschiedlichen Elemente (n).



Im oben gezeigten Beispiel sind gegeben:
Die vier farbunterschiedlichen Strukturelemente

und drei unterschiedliche Besetzungsstellen

$$k = \frac{n!}{(n-b)! \cdot b!}$$

Es ist also

$$n = 4$$
$$b = 3$$

Nach der nebenstehenden Formel wird die Anzahl der möglichen Kombinationen (k) berechnet.

! ist ein Zeichen aus der Mathematik und heißt Fakultät.
Es bedeutet, daß das fortlaufende Produkt aus den natürlichen Zahlen bis zur n-ten Zahl gebildet werden soll.

Beispiele:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

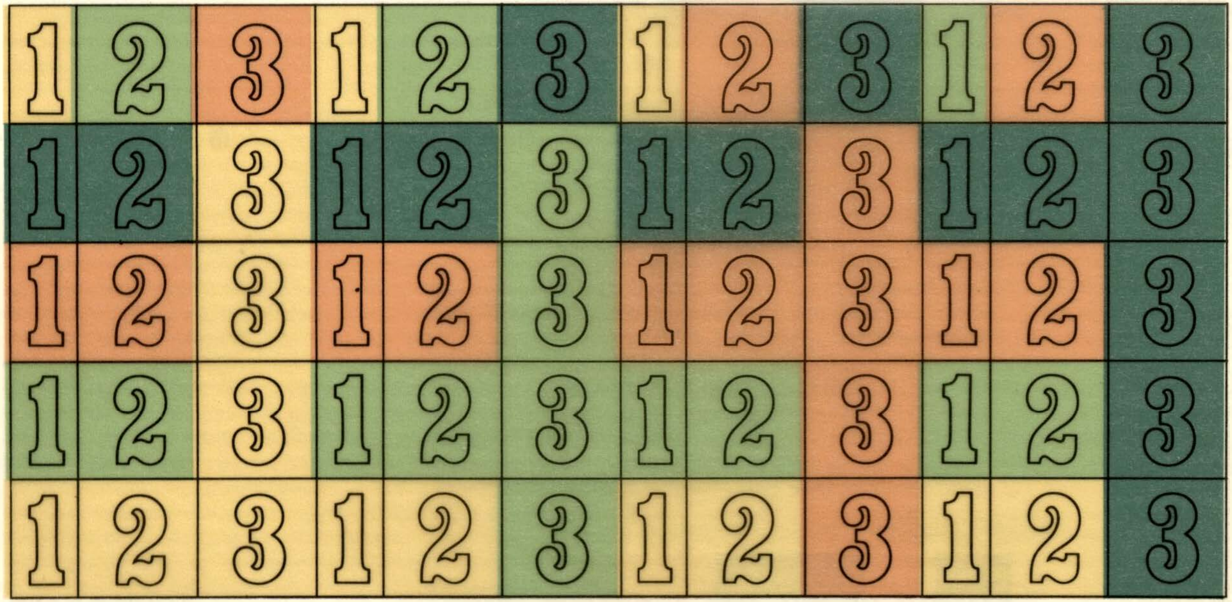
Nach der angegebenen Formel folgt

$$k = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!}$$

$$k = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$k = \frac{24}{6}$$

$$k = 4$$



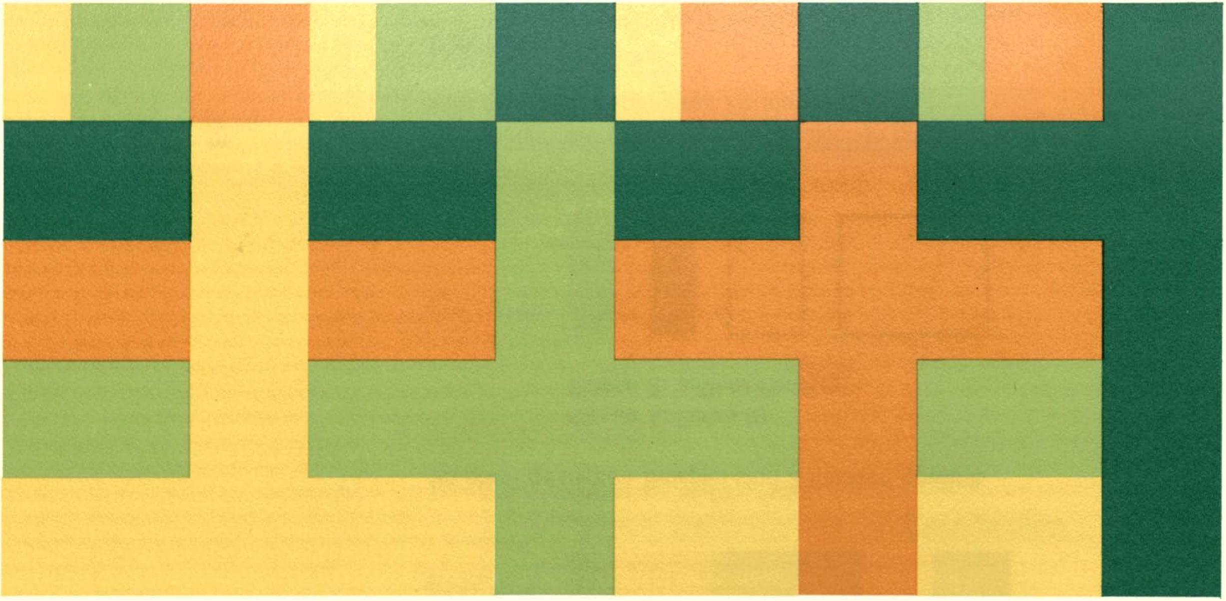
$$k' = \frac{(n+b-1)!}{(n-1)! \cdot b!}$$

Diese Formel wird benutzt, wenn auch Wiederholungen der gegebenen Strukturelemente innerhalb einer Konstellation auftreten sollen.

Für $n = 4$ und $b = 3$ folgt

$$k' = 20$$

Vertauschungen innerhalb dieser Lösungen finden nicht statt.



$$k' = \frac{(n+b-1)!}{(n-1)! \cdot b!}$$

Diese Formel wird benutzt, wenn auch Wiederholungen der gegebenen Strukturelemente innerhalb einer Konstellation auftreten sollen.

Für $n = 4$ und $b = 3$ folgt

$$k' = 20$$

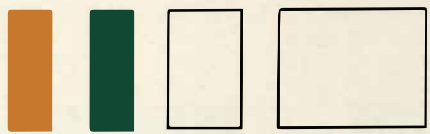
Vertauschungen innerhalb dieser Lösungen finden nicht statt.

II Kombination nach Klassen

Häufig tritt ein kombinatorisches Problem auf, bei dem Strukturelemente nach ihren Merkmalen in Klassen eingeteilt und danach zusammengestellt werden sollen. Das ist dann gegeben, wenn die Strukturelemente mindestens zwei oder mehr unterschiedliche Merkmale besitzen.

Im oben gezeigten Beispiel sind 2 Klassen gewählt

Klasse 1: Farbe (f)
Klasse 2: äußere Form (g)



$$k'' = \prod^{m} \cdot r_i$$

Die Anzahl aller möglichen Kombinationen nach Klassen (k'') wird nach nebenstehender Formel berechnet.

Dabei ist

r_i – Anzahl der Merkmale der i-ten Klasse
m – Anzahl der Klassen

π ist ein Symbol der Mathematik und heißt Pi.
Es weist an, daß das Produkt aller unterschiedlichen r_i gebildet werden soll.

Bei $\overset{m}{\pi}$ soll das Produkt aus m-unterschiedlichen r_i gebildet werden.
Beispiel: Gibt es 3 unterschiedliche Klassen mit der jeweiligen Anzahl von Merkmalen

$$r_2 = 2; \; r_3 = 3; \; r_4 = 4$$

so wird das Produkt gebildet

$$r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

In unserem Beispiel ist

Klasse 1: orange, grün
Klasse 2: breites Rechteck, schmales Rechteck

Es ist also

$$r_f = 2$$
$$r_g = 2$$

Nach der angegebenen Formel folgt

$$k'' = 2 \cdot 2$$
$$k'' = 4$$

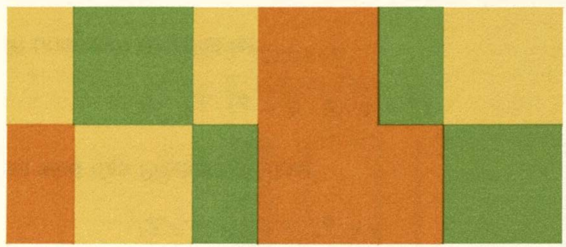
Die Lösungen lassen sich weiter miteinander verknüpfen.

III Variation gleicher Häufigkeiten

$b < n$

Alle Zusammenstellungen und Vertauschungen
kleinerer Anzahlen von Strukturelementen
aus einer größeren Elementenzahl
werden Variation mit gleichen Häufigkeiten genannt.
Die Anzahl der Besetzungsstellen (b) pro Lösung
ist also kleiner als die Anzahl der unterschiedlichen Elemente (n).

Bei der Kombination spielt nur die einfache Zusammenstellung
der Strukturelemente eine Rolle.
Bei der Variation werden die Vertauschungen von n
innerhalb der Zusammenstellungen mit berücksichtigt.



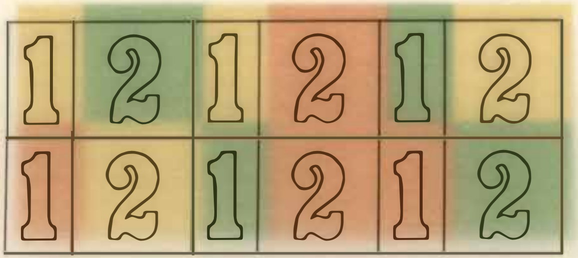
Im oben gezeigten Beispiel sind gegeben:
Die 3 farbunterschiedlichen Strukturelemente

III Variation gleicher Häufigkeiten

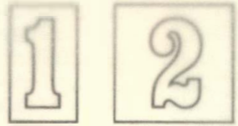
$b < n$

Alle Zusammenstellungen und Vertauschungen
kleinerer Anzahlen von Strukturelementen
aus einer größeren Elementenzahl
werden Variation mit gleichen Häufigkeiten genannt.
Die Anzahl der Besetzungsstellen (b) pro Lösung
ist also kleiner als die Anzahl der unterschiedlichen Elemente (n).

Bei der Kombination spielt nur die einfache Zusammenstellung
der Strukturelemente eine Rolle.
Bei der Variation werden die Vertauschungen von n
innerhalb der Zusammenstellungen mit berücksichtigt.



und die 2 Besetzungsstellen



Es ist also

$$n = 3$$
$$b = 2$$

$v = \frac{n!}{(n-b)!}$

Nach der nebenstehenden Formel wird die Anzahl der Variationsmöglichkeiten (v) wie folgt berechnet

$$v = \frac{3!}{(3-2)!}$$

$$v = 6$$

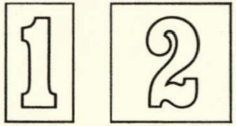
Diese 3 einfarbigen Lösungen kommen hinzu, [illegible]n auch Wiederholungen der gegebenen Strukturelemente berücksichtigt werden.

$v' = n^b$

Nach nebenstehender Formel folgt

$$v' = 9$$

und die 2 Besetzungsstellen



Es ist also

$$n = 3$$
$$b = 2$$

$$v = \frac{n!}{(n-b)!}$$

Nach der nebenstehenden Formel wird die Anzahl der Variationsmöglichkeiten (v) wie folgt berechnet

$$v = \frac{3!}{(3-2)!}$$

$$v = 6$$

Diese 3 einfarbigen Lösungen kommen hinzu, wenn auch Wiederholungen der gegebenen Strukturelemente berücksichtigt werden.

$$v' = n^b$$

Nach nebenstehender Formel folgt

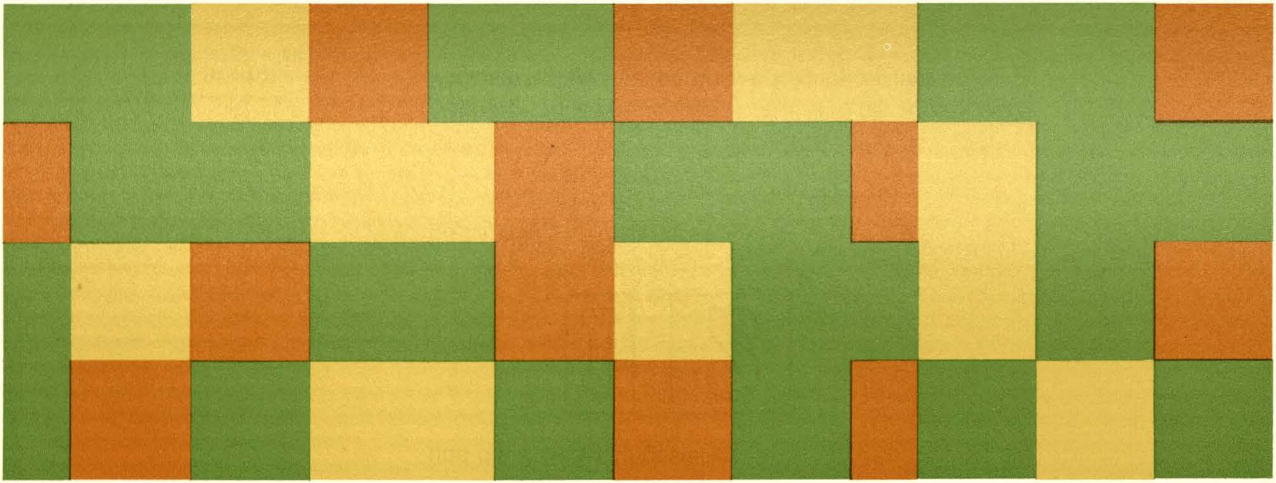
$$v' = 9$$

Wird ein Variationsbeispiel n = 4 und b = 3 angenommen,
so werden ebenfalls bei der Wiederholung von Elementen
ein- und zweifarbige Lösungen entstehen,
wie bei dem angeführten Kombinationsbeispiel.
Die Anzahl der Lösungen ist dabei entsprechend größer.

IV Variation ungleicher Häufigkeiten

$b > n$

Alle Zusammenstellungen und Vertauschungen von Strukturelementen
werden zur Variation mit ungleichen Häufigkeiten gezählt,
wenn die Anzahl der Besetzungsstellen (b) pro Lösung
größer ist als die Anzahl der unterschiedlichen Elemente (n).

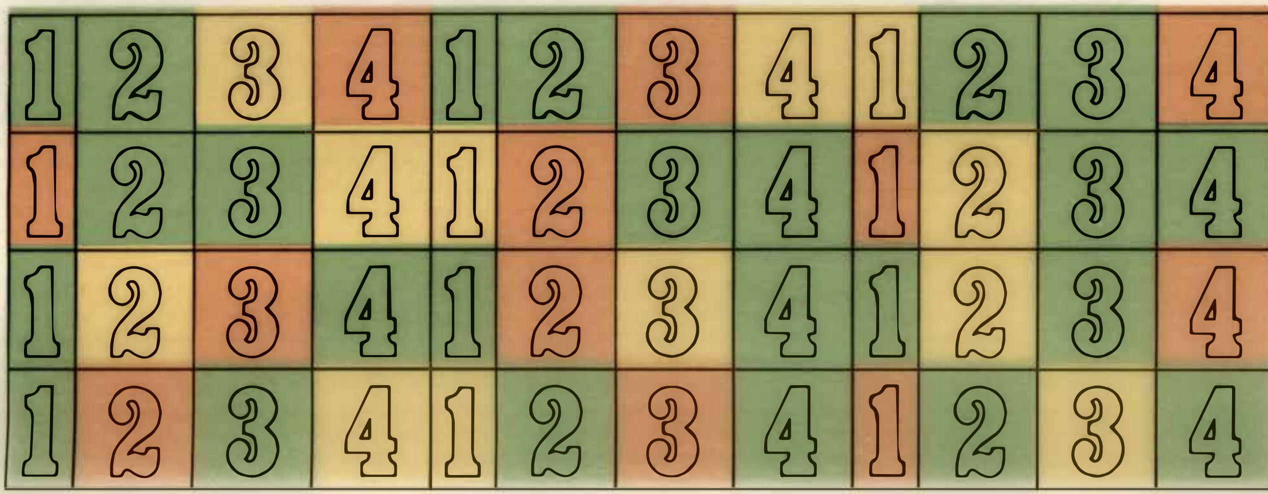


Wird ein Variationsbeispiel n = 4 und b = 3 angenommen,
so werden ebenfalls bei der Wiederholung von Elementen
ein- und zweifarbige Lösungen entstehen,
wie bei dem angeführten Kombinationsbeispiel.
Die Anzahl der Lösungen ist dabei entsprechend größer.

IV Variation ungleicher Häufigkeiten

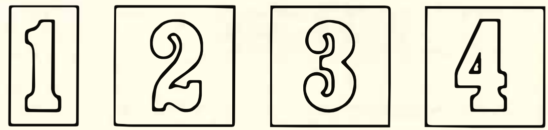
$b > n$

Alle Zusammenstellungen und Vertauschungen von Strukturelementen
werden zur Variation mit ungleichen Häufigkeiten gezählt,
wenn die Anzahl der Besetzungsstellen (b) pro Lösung
größer ist als die Anzahl der unterschiedlichen Elemente (n).



Das oben gezeigte relativ komplexe Beispiel enthält
3 farbunterschiedliche Strukturelemente

und 4 Besetzungsstellen



mit den Häufigkeiten

$$h_{gr} = 2/4 = 1/2$$
$$h_{g} = 1/4$$
$$h_{o} = 1/4$$

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, daß das oben gezeigte Beispiel stellvertretend für andere Lösungen das Phänomen der Superzeichenbildung deutlich macht.
(Superzeichen sind Strukturkomplexe, die sich deutlich vom gesamten bildnerischen Feld abheben. Zum Beispiel in Form von orthogonalen oder diagonalen Farbbetonungen. Siehe auch Seite 23.)

$$v'' = \frac{b!}{\prod_{i=1}^{n} (h_i \cdot b)!}$$

Nach der nebenstehenden Formel wird die Anzahl der Variationsmöglichkeiten (v'') wie folgt berechnet.

$\prod_{i=1}^{n}$ weist an, daß das Produkt aller n-unterschiedlichen $(h_i \cdot b)!$ gebildet werden soll.

$$v'' = \frac{4!}{(1/4 \cdot 4)! \cdot (1/2 \cdot 4)! \cdot (1/4 \cdot 4)!}$$

$$v'' = \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!}$$

$$v'' = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}$$

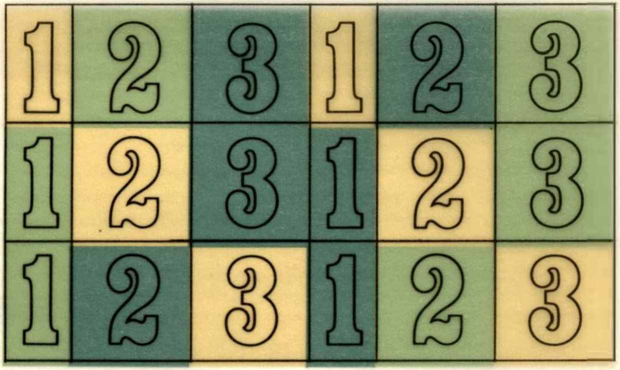
$$v'' = 12$$

Alle Lösungen haben das gleiche Farbrepertoire.

V Permutation

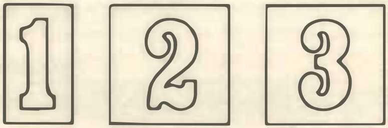
$b = n$

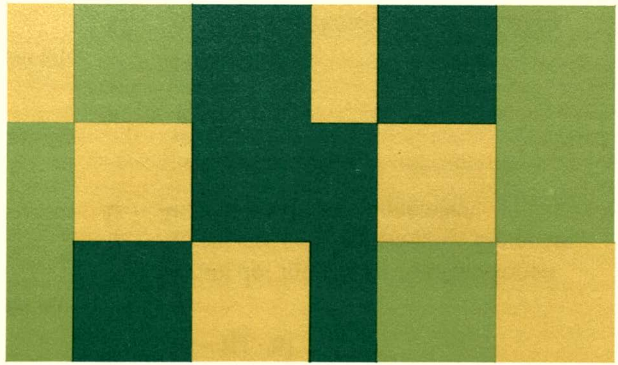
Alle Vertauschungen von Strukturelementen werden Permutation genannt, wenn die Anzahl der unterschiedlichen Elemente (n) der Anzahl der Besetzungsstellen (b) entspricht.



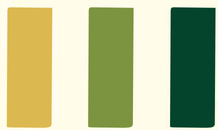
Im oben gezeigten Beispiel sind 3 farbunterschiedliche Strukturelemente gegeben

Dem Permutationsgesetz entsprechend gibt es auch 3 Besetzungsstellen

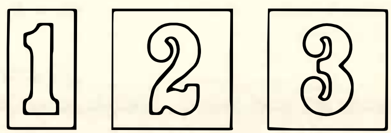




Im oben gezeigten Beispiel sind 3 farbunterschiedliche Strukturelemente gegeben



Dem Permutationsgesetz entsprechend gibt es auch 3 Besetzungsstellen



$p = n!$

Nach der nebenstehenden Formel wird die Anzahl aller Permutationen (p) wie folgt berechnet:

$$p = 3!$$
$$p = 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$p = 6$$

VI Formelsammlung

a) Kombination

$b < n$

$$k = \frac{n!}{(n-b)! \cdot b!}$$

mit Wiederholungen

$$k' = \frac{(n+b-1)!}{(n-1)! \cdot b!}$$

Dabei ist

k – Anzahl der möglichen Kombinationen
n – Anzahl der unterschiedlichen Elemente
b – Anzahl der Besetzungsstellen

Kombination nach Klassen

$$k'' = \prod^{m} \cdot r_i$$

Dabei ist

k''– Anzahl der Merkmale der i-ten Klasse
r_i – Anzahl der möglichen Kombinationen
m – Anzahl der Klassen

b) Variation gleicher Häufigkeiten
$b < n$

$$v = \frac{n!}{(n-b)!}$$

mit Wiederholungen

$$v' = n^b$$

Dabei ist

- v – Anzahl der möglichen Variationen
- n – Anzahl der unterschiedlichen Elemente
- b – Anzahl der Besetzungsstellen

Variation ungleicher Häufigkeiten
$b > n$

$$v'' = \frac{b!}{\prod_{i=1}^{n} (h_i \cdot b)!}$$

Dabei ist

- v'' – Anzahl der möglichen Variationen
- b – Anzahl der Besetzungsstellen
- h_i – Häufigkeit der unterschiedlichen Elemente, bezogen auf die Anzahl der Besetzungsstellen
- n – Anzahl der unterschiedlichen Elemente

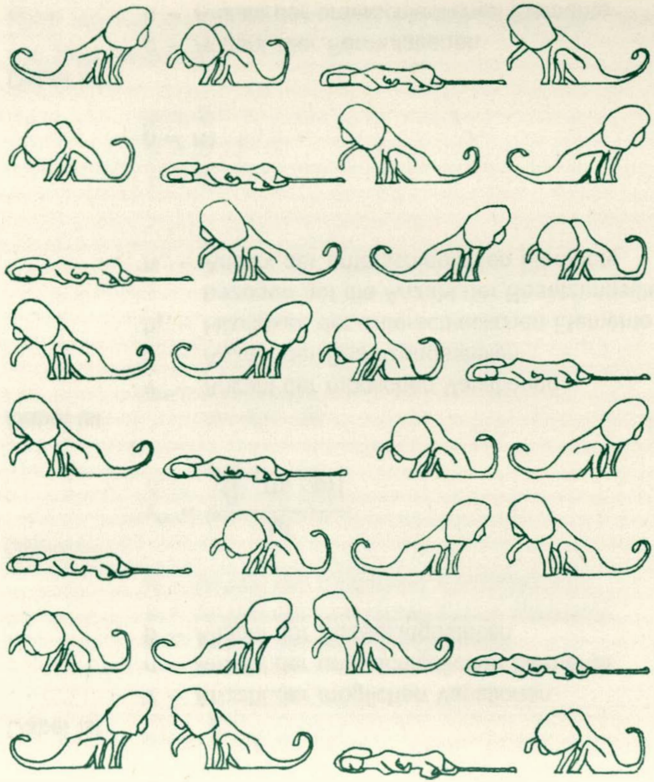
c) Permutation
$p = n$

$$p = n!$$

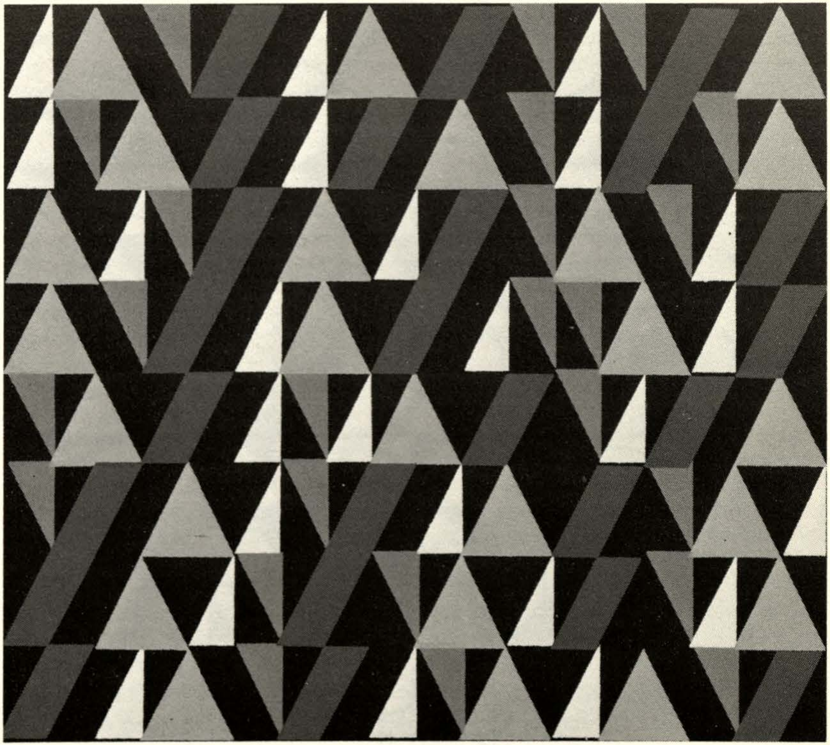
Dabei ist

- p – Anzahl aller Permutationen
- n – Anzahl der unterschiedlichen Elemente

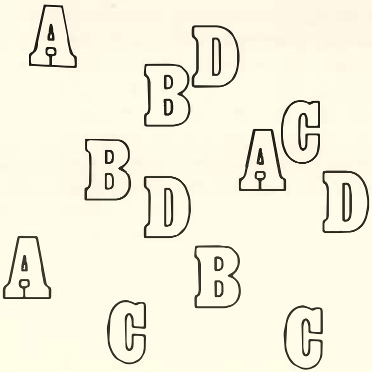
VII Bildbeispiele

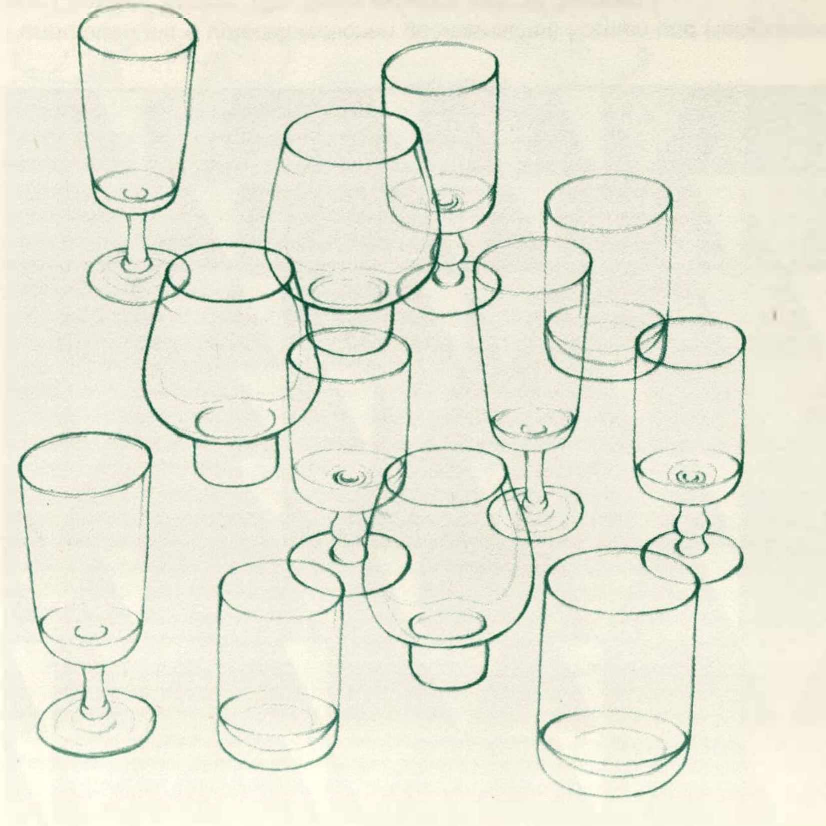


Dieses Beispiel von Rainer Hofmann zeigt eine Auswahl von 8 aus 24 möglichen Konstellationen einer Permutation mit 4 unterschiedlichen Darstellungen derselben Figur.

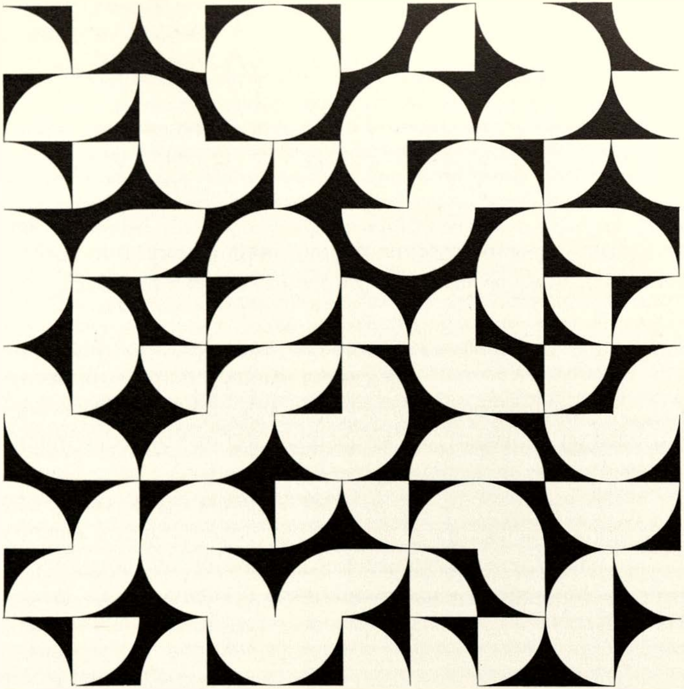


Permutation mit 4 unterschiedlichen geometrischen Formen und Helligkeiten von Christine Becker. (Pro Reihe ergeben sich 3 Lösungen.)





Kombination mit 4 unterschiedlich geformten Gläsern von U. Goede
Zusammenstellung von 2 Gläsern pro Lösung.



Permutation von Klaus Kuhn mit 4 unterschiedlichen Stellungen derselben geometrischen Figur, angeordnet auf einem quadratischen Raster.
Konstellation 1 wiederholt sich rechts unten um ein quadratisches Gesamtbild zu erhalten.

Literatur:
Kurd Alsleben: Ästhetische Redundanz, Quickborn 1962
H. W. Franke: Phänomen Kunst, München 1967
Klaus Staudt im Katalog: Norm und Form,
Methoden konstruktiver Kunst, Paderborn 1972

Dieses Heft entstand in Zusammenarbeit von Studenten und Dozenten.
Es begleitet den Unterricht Kombinatorik im Fachbereich
Visuelle Kommunikation und soll den Studenten eine kurze Zusammenfassung
des Stoffes in die Hand geben.

Herausgegeben von der Hochschule für Gestaltung Offenbach.
Idee und Konzeption: Klaus Staudt und Hans Schmidt
Gesamtgestaltung: Michael Marschall
Gestaltung dieses Heftes: Annette Schnermann

Der Text der ersten vergriffenen Auflage wurde mit wenigen Ausnahmen
unverändert übernommen. Aufbau und Bildmaterial des Heftes wurden
neu gestaltet.

Die auf den Seiten 20-23 gezeigten grafischen Beispiele sind aus dem
Archiv des Fachbereichs Visuelle Kommunikation entnommen.

Gesamtherstellung in den Werkstätten der HfG.
Gesetzt in Helvetica leicht und halbfett.

ISBN 3-921997-08-9